المحاضرة الخامسة

تمرين:

عيّن صورة القطعة المستقيمة $[z_1, z_2]$ التي طرفاها $z_1 = -\pi + i \, , z_2 = \pi + i$ وَفق التابع $cosz$.

الحل:

لتكن $z \in [z_1, z_2]$، عندئذٍ فإنّ $z = x + i$ حيث $-\pi \leq x \leq \pi$، وإن صورة z :

$$w = \cos z = \cos(x) \; ch\,(1) - i \sin(x) \; sh\,(1)$$

ومنه فإن إحداثيات النقطة الصورة w هي:

$$u = ch\,(1).\cos x \quad , v = -sh\,(1).\sin x$$

بما أنّ $\cos(x) = \cos(-x) \, , -\sin(x) = \sin(-x)$، سنستبدل هذه المقادير بما يساويها في w، لتوحيد الوسيط، أي سنكتب:

$$u = ch\,(1).\cos(-x) \quad , v = sh\,(1).\sin(-x)$$

الخطوة التالية هي حذف الوسيط $-x$، وذلك كما يلي:

$$\frac{u}{ch\,(1)} = \cos(-x) \quad , \frac{v}{sh\,(1)} = \sin(-x)$$

$$\frac{u^2}{\left(ch\,(1)\right)^2} + \frac{v^2}{\left(sh\,(1)\right)^2} = 1$$

إذن w صورة z وَفق التابع $w = \cos z$ تقع على القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ ونصفا قطريه هما $ch(1), sh(1)$، ومحوره المحرقي هو ou "لأنّ $sh\,(1) < ch(1)$".

عندما تمسح z القطعة المستقيمة، فإنّ x ستمسح المجال $[-\pi, \pi]$ ، وبالتالي سيمسح الوسيط $-x$ المجال $[-\pi, \pi]$ من π إلى $-\pi$ ، وستمسح الصورة w القطع الناقص السابق بكامله.

لإيجاد محرقي القطع الناقص علينا أولاً حساب c كما يلي:

$$c^2 = a^2 - b^2 = ch^2(1) - sh^2(1) = 1$$

وبالتالي فإنّ المحرقين هما:

$$F(0 + c, 0) = (1,0) \quad , \qquad F'(0 - c, 0) = (-1,0)$$

لنوجد صور طرفي القطعة المستقيمة وبعض نقاطها:

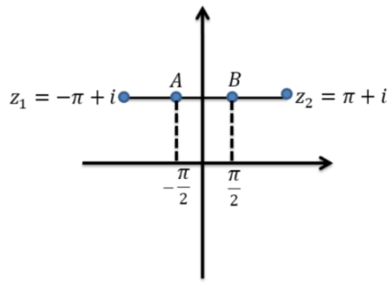
$$\cos z_1 = \cos(-\pi + i) = \cos(-\pi)\, ch\,1 - i \sin(-\pi)\, sh1 = -ch1$$

$$\cos z_2 = \cos(\pi + i) = \cos(\pi)\, ch\, 1 - i \sin(\pi)\, sh1 = -ch1$$

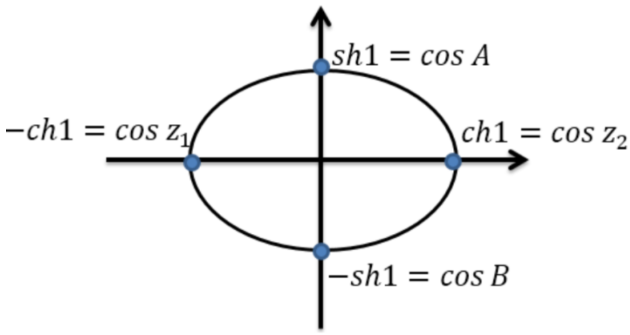
$$cos\, z_A = cos\left(-\frac{\pi}{2} + i\right) = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) ch\, 1 - i\, sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) sh1 = ish1$$

$$\cos z_B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) ch\, 1 - i \sin\left(+\frac{\pi}{2}\right) sh1 = -ish1$$

مما يبيّن أنّه إذا مُسحت القطعة المستقيمة كاملة من z_1 إلى z_2، فإن الصورة ستمسح كامل القطع انطلاقاً من ذروته $w_1 = -ch1$، مرة واحدة مع عقارب الساعة (انظر الشكل).



مستوي المنطلق oxy

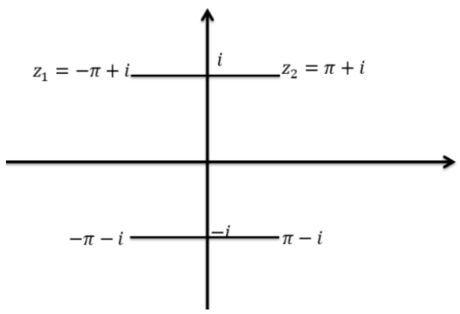


مستوي المستقر ouv

تمرين:"يترك للطالب"

عيّن صورة القطعة النظيرة للقطعة السابقة، وهي القطعة المستقيمة والتي طرفاها $\pi - i\, , -\pi - i$.

أي القطعة الموضحة في الرسم جانباً.



مثال: ما هي صورة القطعة المستقيمة $D_0 = \{z = x\, :\, -\pi \leq x \leq \pi\}$

الحل:

بالتعويض بالشكل الجبري لـ $\cos z$ لأجل من z من القطعة D_0 :

$$u = ch(0).\cos x = \cos x\, , v = sh\,(0) \sin x = 0$$

نجد أنّ الصورة تقع على المحور ou وبما أنّ $u = \cos x$ تمسح المجال $[-1{,}1]$ فإنّ الصورة ستمسح القطعة المستقيمة على المحور ou ابتداءً من النقطة -1 إلى 0، ثم إلى الطرف الآخر$+1$ لتعود ثانية إلى 0 وأخيراً إلى -1 مرة أخرى وذلك عندما تمسح x المجال $[-\pi, \pi]$.

تعيين صورة شريط شاقولي عرضه 2π وَفق تابع التجيب:

بطريقة مماثلة لإيجاد صورة القطعة المستقيمة $D_1 = \{x + i : x \in [-\pi, \pi]\}$ في التمرين أعلاه نستطيع بيان أن صورة قطعة مستقيمة $D_{y_0} = \{x + iy_0 : x \in [-\pi, \pi]\}$ ، لأجل أي عدد حقيقي غير معدوم y_0 مثَّبت (القطعة غير محمولة على المحور ox)، هي القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{u^2}{(ch\,(y_0))^2} + \frac{v^2}{(sh\,(y_0))^2} = 1$$

وهذا قطع مركزه المبدأ، محوره المحرقي ou ، محرقاه $F'(-1,0)$, $F(1,0)$ ونصفا قطريه هما $a = ch\,(y_0)$ ، $b = sh\,(y_0)$.

في حال كان y_0 معدوماً فإن الصورة للقطعة المستقيمة D_0 هي القطعة المستقيمة L المحمولة على ou التي طرفاها $F'(-1,0)$, $F(1,0)$.

مما سبق نجد أنه عندما تمسح القطعة المستقيمة D_{y_0} النصف العلوي من الشريط الشاقولي:

$$S = \{z = x + iy : x \in [-\pi, \pi], y \in]-\infty, \infty[\}$$

ابتداءً من القطعة المحمولة على ou $(y_0 = 0)$ إلى أعلاه نحو ov^+ ستمسح صورة هذه القطعة كامل المستقر (المستوي ouv) ابتداءً من القطعة L ثم بقطوعٍ ناقصة، متحدة المركز $(0,0)$ والمحارق، تتوسع حتى تمسح كامل المستوي.

بما أن $\cos z$ تابع زوجي $(\cos(-z) = \cos z)$ فإن صورة النصف السفلي من الشريط (تحت ox) ستكون مساوية لصورة النصف العلوي له أي مساوية للمستوي العقدي ouv بكامله. بالنتيجة فإن صورة الشريط هي المستوي ouv ممسوح مرتين.

تمرين: مستفيداً من معرفتك لصورة الشريط أعلاه عين صورة المنطلق أي المستوي oxy وفق $\cos z$.

تمرين: عيّن النقاط الشاذة للتابع $f(z) = \frac{1}{\cos z - i}$.

"النقطة الشاذة لتابع هي النقطة التي لا يكون التابع عندها تحليلياً"

الحل:

البسط تحليلي على $\mathbb{C}$، كما أنّ المقام تحليلي على $\mathbb{C}$، لأنّ $\cos$ تحليلي على $\mathbb{C}$، ومنه فإنّ النقاط الشاذة لـ f هي أصفار المقام فقط، أصفار المقام هي حلول المعادلة $\cos z - i = 0$

$$\cos z = i \quad \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} - 2\mathrm{i} = 0$$
$$\Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2\mathrm{i}e^{iz} + 1 = 0$$

بفرض $e^{iz} = t$، تصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$t^2 - 2it + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4(1)(1) = -8$$

ومنه فإنّ $\delta = i\sqrt{8} = 2i\sqrt{2}$ جذر تربيعي لـ Δ ، وبالتالي للمعادلة حلان مختلفان هما:

$$t_1 = \frac{-b+\delta}{2} = \frac{-(-2i)+2i\sqrt{2}}{2} = i\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$t_1 = \frac{-b-\delta}{2} = \frac{-(-2i)-2i\sqrt{2}}{2} = i\left(1-\sqrt{2}\right)$$

نحصل على حلول المعادلة $\cos z - i = 0$ بحل المعادلتين:

$$e^{iz} = i\left(1+\sqrt{2}\right) \quad (1)$$

$$e^{iz} = i\left(1-\sqrt{2}\right) \quad (2)$$

حل المعادلة (1) :

$$e^{iz} = i\left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow e^{ix-y} = \left|1+\sqrt{2}\right| e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-y}e^{ix} = \left|1+\sqrt{2}\right| e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-y}.e^{ix} = \left(1+\sqrt{2}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-y} = 1+\sqrt{2}\,, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \,:\, k \in \mathbb{Z}$$

ومجموعة الحلول (1) هي:

$$A_1 = \left\{ z_k = x + iy = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\, ln\, \left(1+\sqrt{2}\right) :\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

حل المعادلة (2) :

$$e^{iz} = i\left(1-\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow e^{ix-y} = \left|1-\sqrt{2}\right| e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

$$\Leftrightarrow e^{-y}e^{ix} = \left|1-\sqrt{2}\right| e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

$$\Leftrightarrow e^{-y}.e^{ix} = \left(\sqrt{2}-1\right) e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

$$\Leftrightarrow e^{-y} = \sqrt{2}-1\,, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \,:\, k \in \mathbb{Z}$$

ومجموعة الحلول للمعادلة (2) هي:

$$A_2 = \left\{w_k = x + iy = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\, ln\left(\sqrt{2} - 1\right) :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

بالنتيجة فإن مجموعة حلول $\cos z - i = 0$، وبالتالي أصفار $\cos z - i$ هي المجموعة:

$$A = A_1 \cup A_2 = \{w_k, z_k \ :\ k \in \mathbb{Z}\ \}$$

وهي مجموعة النقاط الشاذة للتابع $f(z) = \frac{1}{\cos z - i}$ هي A ، وهذا يكافئ أن مجموعة تحليلية هذا التابع هي $\mathbb{C}\backslash A$.

تابعا الـ $cotg\ z, tan\ z$:

هما تابعان يُعطيان تعريفاً كما يلي:

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \ \&\ cotg\ z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

لنوجد مجموعة قابلية اشتقاق هذين التابعين والمشتق لكل منهما:

نبدأ بـ $cotg\ z$:

إنّ كلاً من البسط والمقام تحليلي على $\mathbb{C}$، وبالتالي فإنّ $cotg\ z$ تحليلي على $\mathbb{C}$ فرق أصفار المقام، أصفار المقام هي حلول المعادلة $\sin z = 0$:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz}$$

$$\Leftrightarrow iz = -iz + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow z = -z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = \pi k \ : k \in \mathbb{Z}$$

ومنه فإنّ أصفار التابع $\sin z$ العقدي هي نفسها أصفار التابع $\sin x$ الحقيقي ومنه فإنّ $cotg\ z$ تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{\pi k: k \in \mathbb{Z}\}$. ويعطى مشتقه بالمساواة:

$$(cotg\ z)' = \frac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z}$$

$$(cotg\ z)' = \frac{-1}{\sin^2 z} = -(1 + cotg^2 z)$$

بنفس الأسلوب نجد أن أصفار $cos\ z$ هي نفسها أصفار التابع $cos\ x$ الحقيقي وأنّ $tan\ z$ تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi k: k \in \mathbb{Z}\}$. ويُعطى مشتقه بالمساواة:

$$(tan\ z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + tan^2 z$$

...انتهت المحاضرة الخامسة...